

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 5

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$ 交抛物线于 A, B 两点, 过点 A 作准线 l 的垂线, 垂足为 E , 若等边 $\triangle AFE$ 的面积为 $36\sqrt{3}$, 则 $\triangle BEF$ 的面积为 () .

A. $6\sqrt{3}$

B. $12\sqrt{3}$

C. 16

D. $24\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$, 则 () .

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称

C. $f(x)$ 的最大值为 2

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

9. 已知函数 $f(x) = x - \ln x + m (m \in \mathbf{R})$, 若 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则下列选项中不正确的是 () .

A. $m < -1$

B. $x_1 + x_2 \leq 2$

C. $0 < x_1 < 1$

D. $e^{x_1 - x_2} = \frac{x_1}{x_2}$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 二项式 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项为 _____ .

11. 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程为 _____ .

12. 曲线 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 _____ 在该点处的切线方程为 _____ .

13. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} = 1$, 则 $a + 2b$ 的最小值为 _____ .

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 2, AD = 1, \angle BAD = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____ .

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a (a \in \mathbf{R})$ 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____ .

三、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

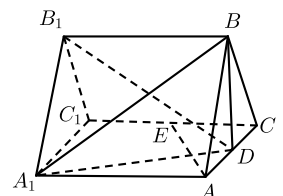
16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $b^2 + c^2 - a^2 = c(a \cos C + c \cos A)$.

(1) 求角 A 的大小 .

(2) 若 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\sin(2B + A)$ 的值 .

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .

17. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是 2, D, E 分别是 AC, CC_1 的中点 .



(1) 求证： $AE \perp$ 平面 A_1BD .

(2) 求直线 AB 与平面 A_1BD 所成角的正弦值 .

(3) 求二面角 $B - A_1D - B_1$ 的余弦值 .

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n + 4n - 7$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明：数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列 .

(2) 若 $b_n = \frac{a_n - 2}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $4\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程 .

(2) 设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A, B , 点 M, N 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点, 且 $F_1M // F_2N$, 记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $3k_1 + 2k_2 = 0$, 求直线 F_1M 的方程 .

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax - a + 1 - \frac{\ln x}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 为单调递减函数, 求 a 的取值范围 .

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围 .